

# Perancangan Metode Kontrol LQR (Linear Quadratic Regulator) Sebagai Solusi Optimal Pengendalian Gerak Quadrotor

Hanum Arrosida

Teknik Komputer Kontrol  
Politeknik Negeri Madiun, PNM  
Madiun-Jawa Timur, Indonesia  
hanumarrosida@pnm.ac.id

## Abstrak

Quadrotor Qball-X4 merupakan pesawat tanpa awak dengan empat motor yang polanya diletakkan secara menyilang. Quadrotor sebagaimana fungsinya, harus memiliki keseimbangan yang baik saat terbang, terutama pada gerak rotasi dan translasi yang sangat mempengaruhi terbang Quadrotor. Gerak lateral merupakan gerak Quadrotor secara horizontal pada ketinggian atau gerak translasi, gerakan ini sangat vital untuk memenuhi kebutuhan Quadrotor dalam mencapai way-to-way point yang telah ditentukan sehingga diperlukan kontroler untuk menstabilkannya. Sistem kontrol yang digunakan pada Quadrotor untuk mengatur gerak translasi sumbu X dan sumbu Y menggunakan kontroler LQR sehingga penentuan parameter-parameter harus tepat agar didapatkan kestabilan yang diinginkan saat melakukan gerak lateral. Nilai parameter yang didapatkan dari hasil tuning terstruktur pada simulasi kontroler LQR untuk pengendalian sumbu X dan Y diperoleh  $Q=1000$   $R=0.3$ .

**Kata kunci:** Quadrotor; Roll; Pitch; LQR; Lateral.

## 1. PENDAHULUAN

### Latar Belakang

Quadrotor memiliki kemampuan untuk bergerak pada sumbu x, y, dan z. Gerakan dan kecepatan Quadrotor ditentukan oleh kecepatan masing-masing motor. Selain itu, harus diperhatikan juga mengenai pengendalian dalam hal attitude dari Quadrotor antara lain gerakan akselerasi (*thrust*), gerakan mengguling (*roll*), gerakan mengangguk (*pitch*) dan gerakan memutar (*yaw*). Quadrotor sebagaimana fungsinya, harus memiliki keseimbangan yang baik saat terbang, terutama pada gerak rotasi dan translasi yang sangat mempengaruhi kondisi terbang Quadrotor [1].

Pengendalian pada Quadrotor memiliki tantangan tersendiri untuk dilakukan secara otomatis, karena Quadrotor memiliki kemampuan gerak manuver yang tinggi, nonlinearitas yang tinggi, dan memiliki enam derajat kebebasan dengan empat aktuator [2]. Beberapa tahun terakhir, berbagai macam metode kontrol telah dieksplorasi dan diaplikasikan untuk pengendalian posisi dan orientasi Quadrotor. Metode kontrol konvensional seperti PID banyak digunakan untuk pengendalian gerak Quadrotor dengan pendekatan *model linear*, namun efek nonlinearitas dari Quadrotor tidak dapat dikompensasi dengan baik oleh kontroler PID.

Dari beberapa penelitian yang telah dipelajari, terdapat beberapa kelemahan yang ditemukan. Kelemahannya antara lain, dilakukannya linearisasi pada *plant nonlinear* yang menyebabkan sempitnya daerah kerja dan penggunaan kontroler *nonlinear* harus disesuaikan dengan karakter sistem. Oleh karenanya, pada Penelitian ini diajukan metode kontrol LQR (*Linear Quadratic Regulator*) untuk memperoleh solusi optimal pada sistem nonlinear yang telah dilinearisasi, sehingga dapat digunakan secara tepat untuk pengendalian gerak pada Quadrotor.

### Rumusan Masalah

. Berdasarkan latar belakang, dapat ditarik pernyataan yang menjadi rumusan permasalahan dalam penelitian ini

1. Bagaimana proses linearisasi pada Quadrotor berdasarkan persamaan sistem yang *nonlinear*.
2. Bagaimana menerapkan metode LQR (*Linear Quadratic Regulator*) dalam pengendalian gerak Quadrotor.
3. Bagaimana mengendalikan gerak Quadrotor agar dapat mengikuti trayektori yang ditentukan dengan nilai *error minimum*.

### Batasan Masalah

Dalam penelitian Perancangan Metode Kontrol LQR (*Linear Quadratic Regulator*) Sebagai Solusi Optimal Pengendalian Gerak Quadrotor ini mempunyai batasan masalah sebagai berikut:

1. Pembuatan dan pengujian sistem dilakukan melalui simulasi
2. Tidak membahas pengendalian arah atau orientasi.

### Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini :

1. Penerapan konsep perancangan metode kontrol LQR (*Linear Quadratic regulator*) pada sistem pengendalian gerak *Quadrotor*.
2. Proses pengendalian gerak *Quadrotor* agar dapat mengikuti trayektori yang ditentukan dengan *error* minimum.

### Kontribusi

Penelitian ini diharapkan mempunyai kontribusi untuk memperoleh rancangan metode kontrol LQR pada pengendalian gerak *Quadrotor*. Harapan selanjutnya dari penelitian ini dapat dijadikan sebagai referensi dalam mengembangkan metode kontrol yang tepat untuk pengendalian gerak *Quadrotor* sehingga *Quadrotor* dapat melakukan gerak pada trayektori yang ditentukan dengan stabil.

### Luaran

Agar produk dan teknologi yang diteliti dan dikembangkan pada penelitian yang dilakukan di Politeknik Negeri Madiun ini dapat diketahui oleh masyarakat umum maka Luaran dalam penelitian ini adalah: Seminar nasional.

## 2. METODOLOGI

Pada penelitian ini akan dilakukan beberapa proses secara bertahap dan berurutan agar tercapai tujuan dalam penelitian ini. Tahap pertama adalah melakukan kajian pustaka yang terkait dengan penelitian yang dilakukan. Kajian pustaka yang dilakukan berhubungan dengan kontroler LQR (*Linear Quadratic Regulator*) dan simulasi pada Matlab di mana materi-materi tersebut ditemukan pada jurnal ilmiah, *proceeding* dan buku teks.

Tahap kedua adalah melakukan pemodelan dinamika *Quadrotor* untuk memperoleh model matematis *plant*. Model ini dapat diperoleh dengan pendekatan dari model matematis sistem yang telah diperhitungkan berdasarkan hubungan sifat fisik.

Tahap ketiga dilakukan perancangan kontroler untuk sistem agar tercapai tujuan secara keseluruhan. Untuk itu diperlukan analisis secara detail permasalahan yang terjadi pada pengendalian gerak *Quadrotor*.

Tahap keempat penerapan melalui simulasi sehingga dapat diketahui respon dari kontroler yang diterapkan pada *plant*, yaitu data simulasi gerak pada trayektori yang ditentukan, nilai *error steady state* yang diperoleh, kemampuan mengatasi gangguan yang diberikan serta mengetahui tingkat kestabilan *Quadrotor* saat terbang.

Tahap selanjutnya, melakukan pengujian dan analisis dari skema kontroler yang telah diterapkan apakah sudah sesuai dengan perancangan secara matematis. Jika hasilnya kurang maksimal bisa dilakukan perubahan atau modifikasi pada sistem atau skema kontrol yang digunakan.

Langkah terakhir dari penelitian ini adalah menarik kesimpulan dari yang sudah dikerjakan, jika hasil pengujian menunjukkan bahwa tujuan penelitian telah tercapai, maka penelitian berhasil menyelesaikan permasalahan dan tujuan dari penelitian tercapai.

### Peubah yang Diamati/Diukur

Data – data nilai konstanta dari parameter *plant* yang akan digunakan dalam simulink MATLAB terdapat pada Tabel 2. Parameter peubah menunjukkan parameter fisik dari *Quadrotor*.

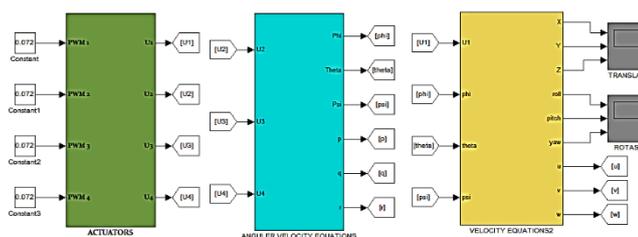
Tabel 2. Parameter *Plant Qball-X4 Quadrotor*

Parameter	Simbol	Nilai	Unit
Input PWM dari aktuator	K	120	N
Jarak antara baling-baling hingga pusat <i>Quadrotor</i>	L	0.2	M
Momen inersia pada sumbu x	$J_{roll}$	0.03	kg.m <sup>2</sup>
Momen inersia pada sumbu y	$J_{pitch}$	0.03	kg.m <sup>2</sup>

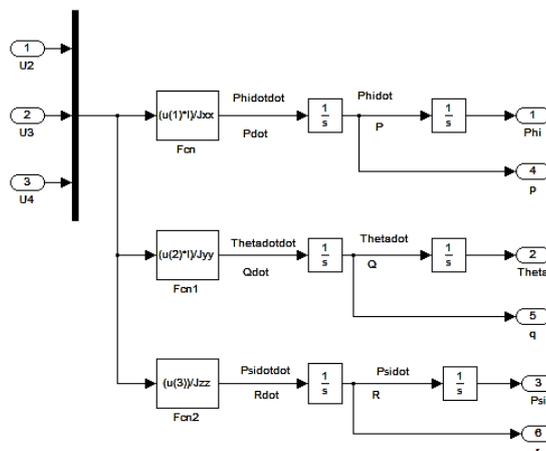
Parameter	Simbol	Nilai	Unit
Momen inersia pada sumbu z	$J_{yaw}$	0.04	kg.m <sup>2</sup>
Massa <i>Quadrotor</i>	M	3.499	kg
<i>Bandwidth</i> aktuator	$\omega$	15	rad/sec

**Model yang Digunakan**

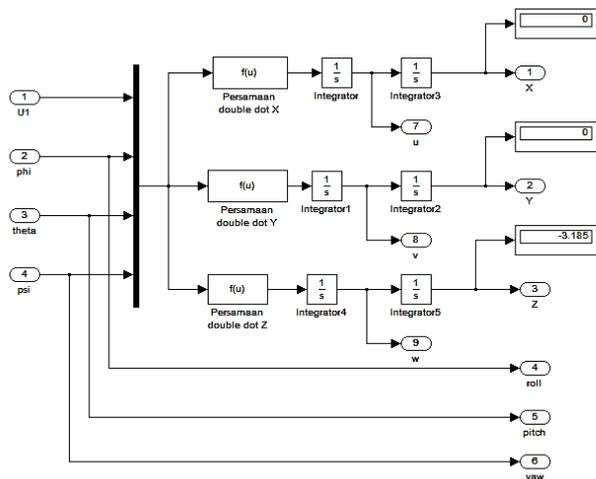
Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai pemodelan sistem Qball-X4 *Quadrotor* yang akan dibuat diagramnya pada *simulink* MATLAB agar dapat disimulasikan. Pemodelan dari Qball-X4 *Quadrotor* ini dapat ditulis dalam bentuk diagram blok *simulink*. Pada Gambar 1 terdapat struktur subsistem rotasi ( $\phi, \theta, \psi$ ) dan subsistem translasi ( $x, y, z$ ). Subsistem dari rotasi dan translasi merupakan persamaan matematik yang dijabarkan dalam bentuk diagram blok. Masing – masing subsistem ditunjukkan pada Gambar 2 untuk nilai rotasi dan Gambar 3 untuk nilai translasi.



**Gambar 1. Diagram Simulink Plant Qball-X4 Quadrotor**



**Gambar 2. Diagram Simulink Subsistem Rotasi**



**Gambar 3. Diagram Simulink Subsistem Translasi**

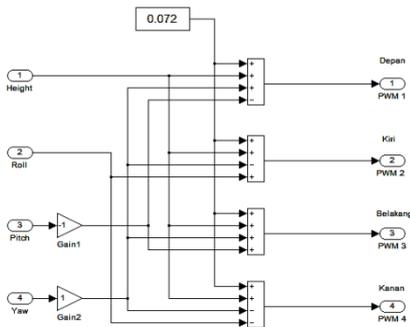
**Rancangan Penelitian**

Dalam perancangan simulasi *Quadrotor* ada 12 buah keluaran yang nantinya menentukan gerak-gerak dari *Quadrotor*. Dua belas keluaran dari kinematik dan dinamika *Quadrotor* diintegrasikan untuk mendapatkan nilai translasi dan rotasi dari *Quadrotor*. Masukan dari model berupa kecepatan putar dari motor 1-4. Dari kecepatan putar tersebut kemudian dihitung nilai gaya-gaya yang bekerja sesuai dengan teori dasar yang telah dibahas pada bab sebelumnya. Persamaan kecepatan putar dari masing-masing motor dapat dilihat pada Persamaan 1.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{F_{T_1} + F_{T_2} + F_{T_3} + F_{T_4}}{m} \\
 U_2 &= F_{T_2} - F_{T_4} \\
 U_3 &= F_{T_1} - F_{T_3} \\
 U_4 &= (F_{T_1} + F_{T_3} - F_{T_2} - F_{T_4})d
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

*Hover* pada *Quadrotor* dapat terjadi apabila secara *visual* saat *Quadrotor* tersebut terbang melayang dan diam tidak menempel *ground* atau gaya ke atas yang dialami *Quadrotor* sama dengan gaya beratnya. Gaya ke atas sebanding dengan kecepatan putar motor, di mana kecepatan putar motor saat gaya ke atas sebanding dengan gaya berat *Quadrotor* dinamakan kecepatan putar nominal. Besar kecepatan putar nominal (gaya angkat) sebesar 0.072.

Pada simulasi ini, sinyal yang diberikan adalah berupa pulsa PWM. Untuk dapat dimasukkan dalam 12 persamaan maka dapat kita berikan masukan berupa PWM nominal dengan perancangan *adder* seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Rangkaian Adder

**Teknik Analisis Data**

Linearisasi *Plant Qball-X4 Quadrotor*

Persamaan model dari *Quadrotor* didapatkan melalui pemodelan fisik yang dasar teorinya telah dijelaskan pada Bab sebelumnya. Dalam perancangan simulasi *Quadrotor* ada 12 buah keluaran yang nantinya menentukan gerak-gerak dari *Quadrotor*. Persamaan tersebut dituliskan pada Persamaan 2.

$$\ddot{x} = U_1 (\cos \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi) \tag{3.2}$$

$$\ddot{y} = U_1 (-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) \tag{3.3}$$

$$\ddot{z} = U_1 \cos \phi \cos \theta - g \tag{3.4}$$

$$\ddot{\phi} = \dot{p} = \frac{U_2 l}{J_{xx}} - \frac{qr}{J_{xx}} (J_{xx} - J_{yy}) \tag{2}$$

$$\tag{3.5}$$

$$\ddot{\theta} = \dot{q} = \frac{U_3 l}{J_{yy}} - \frac{pr}{J_{yy}} (J_{xx} - J_{zz}) \quad (3.6)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{r} = \frac{U_4}{J_{zz}} - \frac{pq}{J_{zz}} (J_{yy} - J_{xx}) \quad (3.7)$$

Ketika gaya drag diabaikan dan sudut orientasi dibuat sangat kecil untuk penerbangan hover, diperkirakan sebesar 0.1 radian.

$$\phi \ll 0.1 \Rightarrow \sin(\phi) \cong 0, \cos \cong 1 \quad (3.8)$$

$$\theta \ll 0.1 \Rightarrow \sin(\theta) \cong 0, \cos \cong 1 \quad (3.9)$$

Sehingga persamaan kinematik dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Jika menggunakan penurunan pada Persamaan 3 dan menerapkannya pada Persamaan 4, maka akan didapatkan persamaan 5.

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(F_{T_2} - F_{T_4})l}{J_{xx}} - \frac{qr}{J_{xx}} (J_{zz} - J_{yy}) \\ \frac{(F_{T_1} - F_{T_3})l}{J_{yy}} - \frac{pr}{J_{yy}} (J_{xx} - J_{zz}) \\ \frac{(F_{T_1} + F_{T_3} - F_{T_2} - F_{T_4})l}{J_{zz}} - \frac{pq}{J_{zz}} (J_{yy} - J_{xx}) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\ddot{\phi} = \dot{p} = \frac{U_2 l}{J_{xx}} - \frac{qr}{J_{xx}} (J_{zz} - J_{yy}) \quad (3.12)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{q} = \frac{U_3 l}{J_{yy}} - \frac{pr}{J_{yy}} (J_{xx} - J_{zz}) \quad (5)$$

(3.13)

$$\ddot{\psi} = \dot{r} = \frac{U_4}{J_{zz}} - \frac{pq}{J_{zz}} (J_{yy} - J_{xx}) \quad (3.14)$$

Jika efek coriolis diabaikan, penyederhanaan persamaan pergerakan dapat diturunkan menjadi Persamaan 6.

$$\ddot{\phi} = \dot{p} = \frac{U_2 l}{J_{xx}} \quad (3.15)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{q} = \frac{U_3 l}{J_{yy}} \quad (6) \quad (3.16)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{r} = \frac{U_4}{J_{zz}} \quad (3.17)$$

Sedangkan persamaan gerak translasi dapat ditulis menjadi persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 (\cos \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi) \\ U_1 (-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) \\ U_1 \cos \phi \cos \theta - g \end{bmatrix} \quad (7) \quad (3.18)$$

Oleh sebab itu, 12 keluaran dari pemodelan *Quadrotor* dapat ditulis seperti berikut:

$$\dot{X} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ U_1(\cos\phi \sin\psi + \cos\phi \sin\theta \cos\psi) \\ U_1(-\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi) \\ U_1 \cos\phi \cos\theta - g \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \frac{U_2 l}{J_{xx}} \\ \frac{U_3 l}{J_{yy}} \\ \frac{U_4}{J_{zz}} \end{bmatrix} = f(X,U) \tag{3.19}$$

dengan,

$$X = [x, y, z, u, v, w, \phi, \theta, \psi, p, q, r]^T$$

$$X = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$$

dan  $U = [U_1, U_2, U_3, U_4]^T$  (3.20)

Perancangan Kontroler

Setelah diperoleh model matematika dan konstanta maka dapat dilakukan perancangan kontroler dengan mencari parameter-parameter kontroler yang diperlukan.

**Model Roll dan Pitch**

Dalam pemodelan *roll* dan *pitch* ini momen inersia dianggap sama  $J_{xx}=J_{yy}=J$ , oleh karena itu pemodelan rotasi *roll* dan *pitch* dapat dirumuskan menjadi persamaan *state* sebagai berikut:

$$\ddot{\phi} = \dot{p} = \frac{U_2 l}{J_{xx}} = \frac{l}{J_{xx}} K \frac{\omega}{s + \omega} \Delta u \tag{3.21}$$

$$\ddot{\theta} = \dot{q} = \frac{U_3 l}{J_{yy}} = \frac{l}{J_{yy}} K \frac{\omega}{s + \omega} \Delta u \tag{3.22}$$

$$\Delta u = u_1 - u_3 \text{ atau } \Delta u = u_2 - u_4 \tag{8}$$

Jika persamaan diatas dan dinamika aktuator digabungkan maka dapat menghasilkan persamaan *state-space* berikut ini:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{v} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Kl}{J} & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ v \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u = A \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ v \\ s \end{bmatrix} + B \Delta u \tag{3.24}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Kl}{J} & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ v \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u = A \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ v \\ s \end{bmatrix} + B \Delta u \tag{3.25}$$

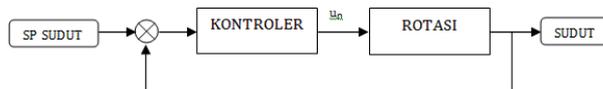
Jadi model *state-space* dan nilai matriks A dan B mempunyai nilai yang sama sehingga besarnya sudut akan menjadi sama dan hanya satu perhitungan yang harus dilakukan untuk menyelesaikan besarnya gain dalam LQR.

Perhitungan nilai K menggunakan program m-file. Dalam perhitungan nilai K, diperlukan penentuan nilai matriks pembobot Q dan R. Setelah dilakukan proses tuning nilai Q dan R, maka diperoleh nilai pembobot Q dan R dengan *output* yang paling baik. Nilai matriks Q dan R untuk *roll* dan *pitch* adalah:

$$Q = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1 \quad (9)$$

Setelah didapatkan matriks Q dan R, kemudian nilai tersebut dijalankan dalam program sehingga diperoleh *gain feedback* untuk *roll* dan *pitch* adalah  $K=[100,0242 \quad 2,4230 \quad 37,9604 \quad 1]$ . Nilai gain optimal ( $K$ ) yang merupakan keluaran dari kontroler *roll - pitch* ditulis dalam m-file yang dapat dilihat pada lampiran *listing* program.

Perancangan diagram blok sistem untuk pengendalian sudut *roll* dan *pitch* dapat ditampilkan pada Gambar 5.



Gambar 5. Diagram Blok Sudut *Roll-Pitch*

### Pemodelan Ketinggian

Qball-X4 bergerak secara vertikal (sepanjang sumbu Z) merupakan akibat perputaran empat baling-baling yang berputar secara bersama-sama. Dimisalkan, masukan PWM untuk setiap baling-baling besarnya sama jadi model dinamik Qball-X4 pada kasus ini dapat ditulis sebagai berikut:

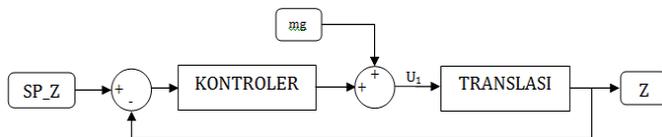
$$\ddot{z} = \frac{4F_T}{m} \cos\phi \cos\theta - g \quad \text{dengan } F = Kv \quad (3.27)$$

Persamaan dinamik di atas dapat dituliskan menjadi *state-space* seperti berikut ini:

$$\begin{bmatrix} \dot{Z} \\ \ddot{Z} \\ \dot{v} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ v \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

(3.28)

Perancangan diagram blok sistem untuk pengendalian ketinggian dapat ditampilkan pada Gambar 6.



Gambar 6. Diagram Blok Ketinggian

### Pemodelan Yaw

Pergerakan sumbu *yaw* disebabkan oleh perbedaan torsi antara motor yang berputar searah dengan jarum jam (motor 1 dan 3) dengan motor yang berputar berlawanan jarum jam (motor 2 dan 4). Pergerakan sumbu *yaw* ditunjukkan oleh Persamaan 29.

$$\ddot{\psi} = \dot{r} = \frac{U_4}{J_{zz}} = \frac{K_{yaw}}{J_{zz}} \Delta u \quad (11) \quad (3.29)$$

$$\Delta u = u_1 + u_3 - u_2 - u_4$$

Persamaan dinamik sumbu *yaw* ditulis dalam bentuk *state-space* pada Persamaan 30.

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{yaw}}{J_{zz}} \end{bmatrix} \Delta u \quad (12) \quad (3.30)$$

### Kontroler Linear Quadratic Regulator (LQR)

Ada beberapa prosedur yang dilakukan untuk mendapatkan parameter kontroler *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Penghitungan parameter kontroler LQR membutuhkan parameter *plant* dalam bentuk *state space*. Pada penelitian ini kontroler optimal LQR digunakan untuk mendapatkan sistem yang stabil, yaitu mendekati *set point*, matrix pembobot Q dan R didapat dengan melakukan *tuning (trial and error)*. Karena proses *waypoint* membutuhkan *tracking* hanya pada gerak translasi X dan Y, maka persamaan *state* dan pengaturan dengan LQR dibatasi hanya pada X dan Y (Persamaan 13 dan 14). Representasi *plant* dalam *state-space*:

$$\ddot{x} = \frac{4K}{m} v \sin \theta \approx \frac{4K}{m} v \theta$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{4K}{m} v \theta \quad (13) \quad (3.31)$$

$$\ddot{y} = \frac{4K}{m} v (-\sin \phi) \approx -\frac{4K}{m} v \phi$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{4K}{m} v \phi \quad (14) \quad (3.32)$$

Dari Persamaan 13 dan 14, didapatkan nilai-nilai parameter kontroler LQR seperti di bawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad (15)$$

Kemudian untuk pemilihan matriks pembobot, matriks Q adalah matriks yang nilainya menentukan lebar area *state*, sedangkan matriks R adalah matriks yang nilainya menentukan lebar jangkauan aksi kontrol. Semakin besar matriks Q maka akan memperbesar elemen penguatan *state feedback gain* K sehingga akan mempercepat respon mencapai keadaan tunak. Untuk hasil desain yang baik maka dipilih harga matriks Q besar dan R kecil. Dengan melalui proses *trial and error*, dipilih nilai matriks Q dan R sebesar:

$$Q = 1000 \quad R = 0.3$$

Penghitungan parameter kontroler dilakukan melalui beberapa tahap: pertama, penyelesaian matriks *Differential Riccati Equation* (DRE)

$$0 = -\bar{P}A - A'\bar{P} + \bar{P}BR^{-1}B'\bar{P} - C'QC \quad (3.33)$$

kedua, menyelesaikan persamaan kontrol optimal yang didapatkan melalui:

$$u^*(t) = -K(t)x^*(t) + R^{-1}(t)B'(t)g(t)$$

$$\text{di mana } K(t) = R^{-1}(t)B'(t)P(t) \quad (3.34)$$

Setelah program dijalankan dengan memasukkan nilai matriks Q dan R maka akan diperoleh *gain feedback* untuk sumbu X dan Y adalah  $K = [100,024 \quad 2.423 \quad 37,960 \quad 1]$ .

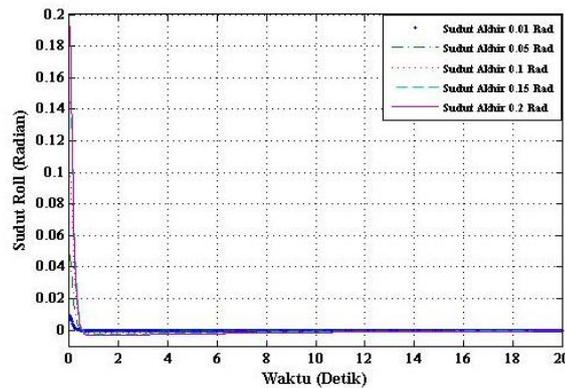
## 3. HASIL DAN ANALISA

### Simulasi Gerak Rotasi

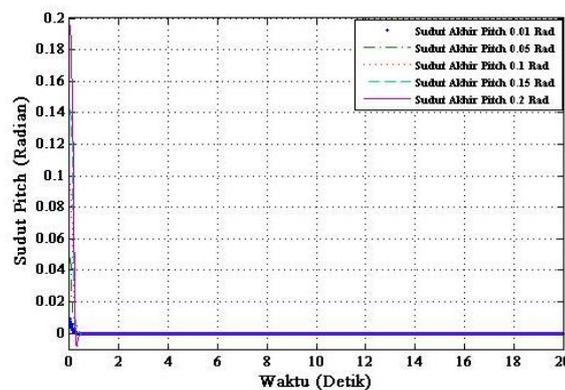
Terdapat 2 gerak yang akan diuji dalam hal ini yaitu gerak rotasi hanya pada sudut *pitch* dan *roll*. Simulasi dilakukan dengan menggunakan perangkat lunak simulink Matlab. Gerak rotasi sudut *pitch* dipengaruhi oleh sumbu X, gerak sudut *roll* dipengaruhi oleh sumbu Y sementara pada sudut *yaw* dan ketinggian diabaikan.

#### ➤ Simulasi dengan *Initial Condition* yang Berbeda

Simulasi ini menunjukkan respons sistem ketika diberikan *initial condition* yang bukan merupakan nilai *operating point*-nya. Gambar 7 merupakan respons dari *roll* dan *pitch* terhadap *initial condition* yang tidak pada *operating point*-nya. *Initial condition* dari sudut *roll* dan *pitch* dibuat berubah-ubah sebesar 0,01 rad, 0,05 rad, 0,1 rad, 0,15 rad, 0,2 rad.



Gambar 7. Respons Roll Terhadap *Initial Condition* yang Berbeda



Gambar 8. Respons Pitch Terhadap *Initial Condition* yang Berbeda

Gambar 7 dan 8 menunjukkan bahwa ketika *roll* dan *pitch* diberi *initial condition* yang berbeda-beda maka respon akan bergerak menuju titik nol. Hasil dari analisa di atas menunjukkan sudut *roll* dan *pitch* menuju titik stabil saat mendekati detik ke-20.

➤ Simulasi Perubahan Matriks Pembobot Q dan R

Pada pengujian ini dilakukan dengan mengubah-ubah nilai dari matriks pembobot Q dan R untuk mendapatkan variasi gain K. Langkah yang paling mudah adalah mengtuning matriks pembobot Q dan R dengan memberikan pembobot R=1 dan Q=CT\*C kemudian mengatur matriks Q agar sesuai dengan state mana yang lebih diutamakan. Perhitungan menggunakan *Algebra Riccati Equation* (ARE) pada matlab sehingga diperoleh gain K.

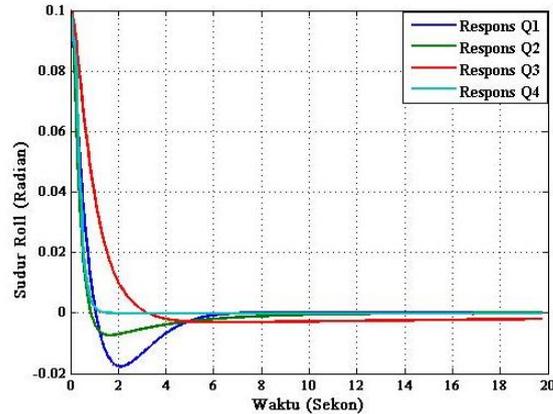
$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K_1 = [1,7412 \quad 1,0159 \quad 13,7896 \quad 1] \quad (16)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K_2 = [3,4751 \quad 1,0382 \quad 16,958 \quad 1] \quad (17)$$

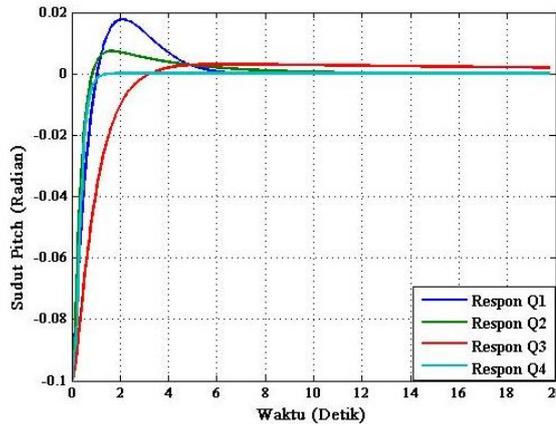
$$Q_3 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K_3 = [10,3194 \quad 3,2451 \quad 40,1496 \quad 1]_{(18)}$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K_4 = [100,0242 \quad 2,423 \quad 37,9604 \quad 1]_{(19)}$$

Masing-masing respons *gain* K menunjukkan respons perubahan matriks pembobot Q yang disimulasikan pada simulink seperti pada Gambar 9 (*roll*) dan Gambar 10 (*pitch*).



Gambar 9. Respon Perubahan Q Terhadap Roll



Gambar 10. Respon Perubahan Q Terhadap Pitch

Berdasarkan respons yang telah ditunjukkan pada Gambar 9 dan Gambar 10, *rise time* (*tr*) dari perubahan bobot Q dengan kriteria 5% - 95% untuk *roll* dan *pitch* besarnya bervariasi, besarnya *rise time* untuk masing-masing respon dihitung dengan menggunakan Persamaan 20-21.

$$\tau = 0,632 * K \tag{20}$$

$$tr = \tau * \ln 19 \tag{21}$$

Rise time dari masing-masing pembobot Q dan R pada sudut *roll* dan *pitch* adalah:

$$Q_1 \Rightarrow \tau = 1,1 \quad \text{maka, } tr = 3,239 \text{ detik}$$

$$Q_2 \Rightarrow \tau = 2,196 \quad \text{maka, } tr = 6,466 \text{ detik}$$

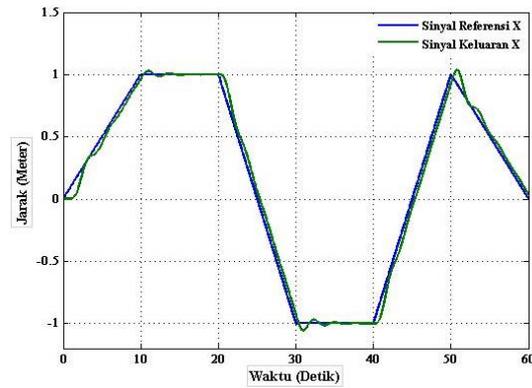
$$Q_3 \Rightarrow \tau = 6,522 \quad \text{maka, } tr = 19,203 \text{ detik}$$

$$Q_4 \Rightarrow \tau = 63,215 \quad \text{maka, } tr = 186,133 \text{ detik}$$

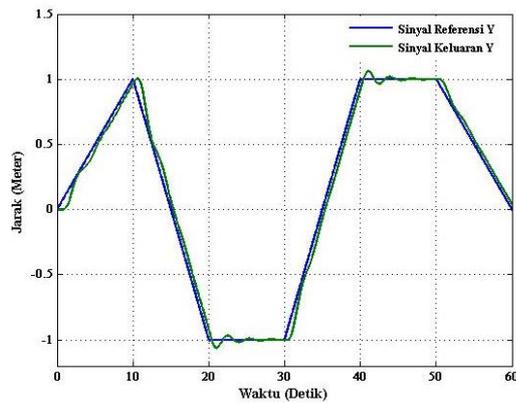
Dari hasil perubahan *rise time* menunjukkan semakin besar pembobot Q yang digunakan maka akan mempercepat respons sistem mencapai keadaan tunak (*steady state*).

**Simulasi Gerak Translasi**

Pada sub bab sebelumnya telah dibahas mengenai respon sudut *roll* dan *pitch* jika diberi *initial condition* dan referensi yang berbeda. Pada simulasi gerak translasi ini, diperoleh respon translasi sumbu X dan Y seperti pada Gambar 11 dan 12.

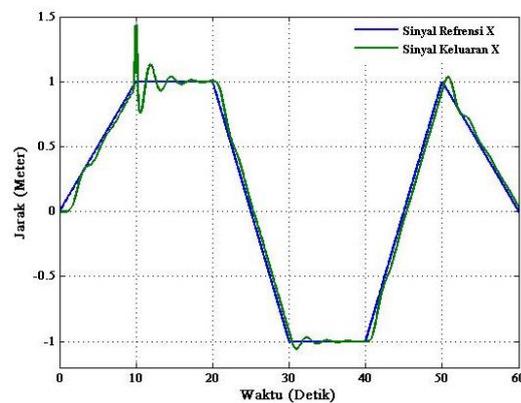


**Gambar 11.** Respon Translasi Sumbu X



**Gambar 12.** Respon Translasi Sumbu Y

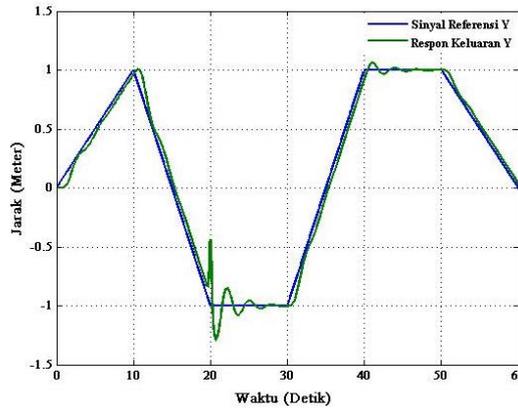
Selanjutnya, kontroler yang akan diuji adalah kontroler untuk gerak translasi X dan Y. Pengujian akan dilakukan dengan membandingkan hasil respon dari tiap sumbu yang diberi gangguan (gangguan pada sumbu X pada detik ke-10 dan sumbu Y pada detik ke-20) dan hasil respon dari setiap sumbu yang diberi gangguan dan dikontrol dengan kontroler LQR.



**Gambar 13.** Respon Sumbu X Terhadap Gangguan Detik ke-10

Gambar 13 terlihat bahwa tidak terjadi perubahan pada respon X. Hal ini disebabkan karena gangguan yang diberikan berhasil diredam sehingga tidak mempengaruhi respon dari translasi X.

Selanjutnya, akan dilihat perubahan dari respon Y yang diberi gangguan pada detik ke-20. Gambar 14 menunjukkan respon dari sumbu Y yang diberi gangguan di detik ke-20.



**Gambar 14.** Respon Sumbu Y Terhadap Gangguan Detik ke-20

Respon sumbu Y hampir sama dengan sumbu X karena sumbu X dan Y memiliki karakteristik yang sama. Hasil yang telah diperoleh dari perbandingan sumbu X dan Y yang diberi gangguan memiliki sedikit osilasi tetapi tidak berlangsung lama dan kemudian kembali mengikuti lintasan.

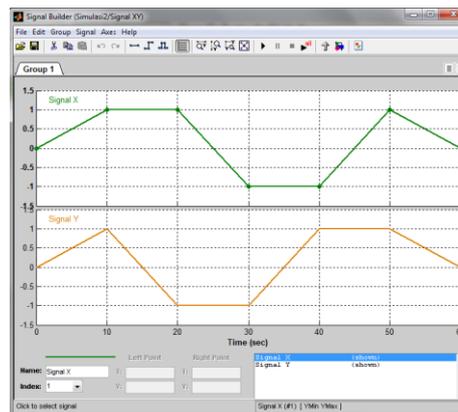
**Gerak Waypoint**

Gerak lintasan pada simulasi (*way-to-way point*) terlebih dahulu ditentukan lintasan sesuai dengan yang diharapkan. Pada simulasi ini, untuk dapat melihat respon gerak translasi pada sumbu X dan Y maka dibuat lintasan berupa persegi dengan arah pergerakan sebagai berikut:

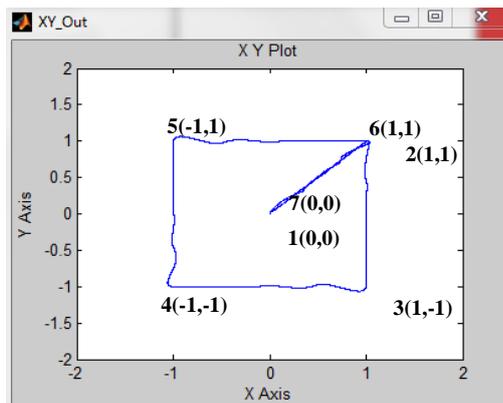
1. Posisi awal *Quadrotor* berada pada titik XY (0,0).
2. *Quadrotor* bergerak menuju titik XY (1,1), dimana sudut *roll* dan *pitch* sama-sama bergerak.
3. *Quadrotor* bergerak menuju titik XY (1,-1), di mana sudut *roll* bergerak sedangkan sudut *pitch* tetap.
4. *Quadrotor* bergerak menuju titik XY (-1,-1), di mana sudut *pitch* bergerak sedangkan sudut *roll* tetap.
5. *Quadrotor* bergerak menuju titik XY (-1,1), di mana sudut *roll* bergerak sedangkan sudut *pitch* tetap.
6. *Quadrotor* bergerak menuju titik XY (1,1), di mana sudut *pitch* bergerak sedangkan sudut *roll* tetap.
7. *Quadrotor* bergerak menuju titik XY (0,0), dimana sudut *roll* dan *pitch* sama-sama bergerak.
8. Ketinggian *Quadrotor* saat melakukan gerak lateral diabaikan, pada simulasi ini menggunakan ketinggian awal 2m.

Masukan sinyal X dan Y yang akan diberikan dibuat dengan bantuan salah satu *block* dari simulink yang bernama *signal builder* di mana *block* ini berfungsi untuk membuat sinyal sesuai dengan yang diharapkan oleh pengguna. Sinyal yang akan dipakai sebagai masukan untuk lintasan *Quadrotor* dapat dilihat pada Gambar 15.

Dapat dilihat hasil simulasi pada XY Graph berupa penampakan dua dimensi yang menunjukkan pergerakan translasi dari *Quadrotor* secara visual untuk mencapai *way-to-way point* yang telah ditentukan. Simulasi dua dimensi pada XY Graph dapat menunjukkan performansi secara intuitif dari *Quadrotor* seperti yang ditunjukkan pada Gambar 16.



**Gambar 15.** Sinyal Referensi X dan Y



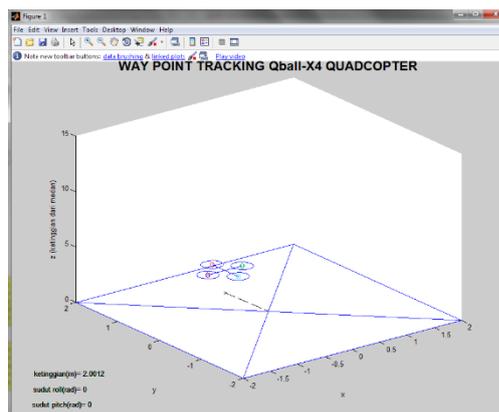
**Gambar 16.** Tampilan 2D Way-To-Way Point Pada XY Graph

Gambar 16 merupakan hasil respon gerakan translasi pada sumbu X dan sumbu Y yang dilakukan secara bergantian untuk dapat membuat lintasan persegi. Pada sumbu X akan diikuti oleh perubahan nilai sudut rotasi *pitch* sedangkan pada saat melakukan gerak translasi sumbu Y akan diikuti oleh perubahan nilai rotasi sudut *roll*. Perubahan rotasi sudut *roll* pada translasi sumbu X sangat kecil sehingga tidak mempengaruhi posisi sumbu Y pada saat *Quadrotor* bergerak. Begitu juga sebaliknya saat melakukan translasi pada sumbu Y, dimana perubahan rotasi sudut *pitch* pada translasi sumbu Y sangat kecil sehingga tidak mempengaruhi posisi sumbu X pada saat *Quadrotor* bergerak.

#### Simulasi 3D Pergerakan Quadrotor

*Quadrotor* pada penelitian ini disimulasikan dengan simulasi 3D, hal ini dilakukan agar dapat melihat pergerakan *Quadrotor* lebih jelas sehingga dengan melihat pergerakan pada simulasi tiga dimensi ini tidak ragu lagi untuk mengimpelentasikannya pada *plant Quadrotor* yang nyata, hal ini dimaksudkan juga untuk meminimalisir kerusakan *Quadrotor* akibat dari perancangan/desain kontrol yang tidak matang.

Hasil simulasi tiga dimensi menunjukkan pergerakan rotasi dan pergerakan translasi dari *Quadrotor* secara visual untuk mencapai *way-to-way point* yang telah ditentukan. Simulasi tiga dimensi dapat menunjukkan performansi secara intuitif dari *Quadrotor* seperti yang ditunjukkan pada Gambar 17.



**Gambar 17.** Simulasi 3D Way-To-Way Point Quadrotor

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pengujian dan analisis, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Nilai parameter yang didapatkan dari hasil perhitungan dengan menggunakan perhitungan LQR untuk mencari nilai optimal *pitch* dan *roll* didapatkan nilai  $Q = \text{diag}([10000 \ 1 \ 1000 \ 1])$ ,  $R=1$  sedangkan pada sumbu X dan Y menggunakan perhitungan LQR  $Q=1000$ ,  $R=0.3$ .
2. Metode LQR dapat mengatasi gangguan yang diberikan pada gerak translasi X dan Y.
3. Berdasarkan hasil simulasi dapat diketahui target bergerak mengikuti sinyal referensi (signal builder) yang telah ditentukan.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

Milionis, Georgios, "A Frame For Collaborative Quadrotor-Ground Robot Missions", Thesis, Naval Postgraduate, California, 2011.

- Gamayanti, Nurlita, "Diktat Kuliah Dasar Sistem Pengaturan", Teknik Elektro Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- X. Hua, J. Feng-shui, Y. Jian-qiang. "Automatic Takeoff of Unmanned Aerial Vehicle based on Active Disturbance Rejection Control". IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. 2009.
- Desineni Subbaram Naidu, "Optimal Control System", CRC Press, 2003.
- Kardono, "Perancangan dan Implementasi Sistem Pengaturan Optimal LQR untuk Menjaga Kestabilan Hover Pada Quacopter", Tugas Akhir, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 2012.
- Ogata, Katsuhiko, "Teknik Kontrol Atuatomatik –terjemahan Ir. Edi Laksono" Erlangga, Jakarta 1991.
- Gamayanti, Nurlita, "Karakteristik Sistem Ordo Pertama", Teknik Sistem Pengaturan, Jurusan Teknik Elektro FTI-ITS, Surabaya, 2010.
- Rosyid, Dimaz Ma'ruf. "Perancangan dan Implementasi Kontroler PID independent dan Metode Decoupling pada Gerakan Lateral UAV untuk Tracking Waypoint", Tugas Akhir, Teknik Sistem Pengaturan, Jurusan Teknik Elektro FTI-ITS, Surabaya, 2012.
- W. Beard, Randal. "Quadrotor Dynamics and Control", Brigham Young University, February 19, 2008.
- Tommaso Bresciani, "Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter". Department of Automatic Control Lund University, October 2008.
- Arjin, N. Theeerachai, W. (2007), "Design of Decoupled Controller for TITO System using Characteristic Ratio Assignment", *International Conference on Control Automation and Systems*, 957-962.
- Ogata, K. (2002), *Modern Control Engineering*, 4<sup>th</sup> edition, Prentice-Hall, New Jersey.